科　目　名	学年	番号	学 籍 番 号	氏　　　名
量子力学 I　第 1 回	2			

全問解答し，答え合わせ（自己採点）をして提出せよ。　　　　**授業時間外の学習時間：＿＿時間＿＿分**

[1] 「詳解　量子化学の基礎」の付録 C.3：複素数について（405 頁〜406 頁）と「前期量子論から Schrödinger 方程式まで」の第 1 章と付録 A（20 頁〜24 頁）を読みなさい。

[2] 数学　$i^2 = -1$ となる数 i を $\boxed{\text{(a)}}$ という。

[3] 数学　指数関数 e^a と e^b の積は，

$$e^a \times e^b = \boxed{\text{(b)}} \tag{1}$$

と書ける。指数関数の肩に乗る引数が i を含む場合でも，上の関係が成り立つ。すなわち，$e^{i\theta}$ と $e^{i\theta'}$ の積は以下のように書ける。

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = \boxed{\text{(c)}} \tag{2}$$

[4] 数学　x, y を実数とし，$z := x + iy$ で表される z を**複素数**（ふくそすう）という。複素数 z に対し，虚数部の符号が異なる複素数を z と共役な複素数といい z^* と書く（$\bar{z}$ と書く流儀もある）。以下の z, ϕ, φ に共役な複素数を示せ。

- $z := x + iy$ のとき，$z^* = \boxed{\text{(d)}}$
- $\psi = e^{aix}$ のとき，$\psi^* = \boxed{\text{(e)}}$
- $\varphi = \sin x$ のとき，$\varphi^* = \boxed{\text{(f)}}$

また，複素数 $z := x + iy$ の絶対値を，

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3}$$

と定義する。ところで，z と z^* の積は，

$$\begin{aligned} z^* z &= (x - iy)(x + iy) = x^2 + \cancel{ixy} - \cancel{ixy} - (iy)^2 \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned} \tag{4}$$

であるから，$z^* z = \boxed{\text{(g)}}$ と書ける。これよりただちに，$|z| = \sqrt{zz^*}$ を得る。この関係を用いれば，$e^{i\theta}$ の絶対値は，

$$\begin{aligned} |e^{i\theta}| &= \sqrt{e^{i\theta} e^{-i\theta}} \\ &= \boxed{\text{(h)}} \end{aligned} \tag{5}$$

と計算される。

[5] 数学　次式を $\boxed{\text{(i) 人名}}$ の公式という。

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i \sin\theta \quad \text{（複号同順）} \tag{6}$$

この 2 式の和と差から，以下の関係式を得る。

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{\boxed{\text{(j) 数値}}} \tag{7}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{\boxed{\text{(k) 数値}}} \tag{8}$$

また，$n \in \mathbb{N}$（n は整数という意味）のとき，

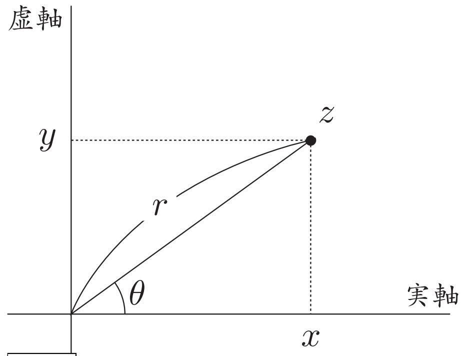
$$\begin{aligned} e^{\pm i(2n\pi)} &= \cos(2n\pi) \pm i \sin(2n\pi) & (9) \\ &= \boxed{(\ell)\ \text{数値}} & (10) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{(j) 数値}}$ のヒント

$$\begin{array}{rcl} e^{i\theta} &=& \cos\theta + \cancel{i\sin\theta} \\ + \quad e^{-i\theta} &=& \cos\theta - \cancel{i\sin\theta} \\ \hline e^{i\theta} + e^{-i\theta} &=& 2\cos\theta \end{array}$$

$\boxed{\text{(k) 数値}}$ のヒント

$$\begin{array}{rcl} e^{i\theta} &=& \cancel{\cos\theta} + i\sin\theta \\ - \quad e^{-i\theta} &=& \cancel{\cos\theta} - i\sin\theta \\ \hline e^{i\theta} - e^{-i\theta} &=& 2i\sin\theta \end{array}$$



[6] [数学] 複素数 $z = x + iy$ は，2 つの実数 x と y の順序対で表されているから，これを 2 次元平面上の点で表すことができる。横軸に**実軸**をとり，縦軸に [(m) 図を見よ] 軸をとる。この平面を [(n) 人名] 平面という。複素数 $z = x + iy$ は，この平面の点 (x, y) で表される。また，図に示したように r と θ をとると，

$$x = r\cos\theta \quad y = \boxed{\quad\text{(o)}\quad} \tag{11}$$

であるから，$z = x + iy$ は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} z &= r\cos\theta + i\,\boxed{\quad\text{(o) 再出}\quad} \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \end{aligned} \tag{12}$$

このように，複素数 z を r と θ を用いて表すことを，**複素数の極形式表示**という。また，r を [(p)] といい，θ を**偏角**という。ところで図を見ればわかるように，[(q) 人名] の定理から $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ の関係がある。複素数の絶対値の定義：(3) 式と $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ を比べると，r は複素数の絶対値に等しいことがわかる。すなわち，

$$r = |z| \tag{13}$$

と書ける。また，(6) 式より (12) 式の括弧の中は $e^{i\theta}$ と書けるから，

$$z = re^{i\theta} \tag{14}$$

を得る。上 2 式よりただちに，

$$z = |z|e^{i\theta} \tag{15}$$

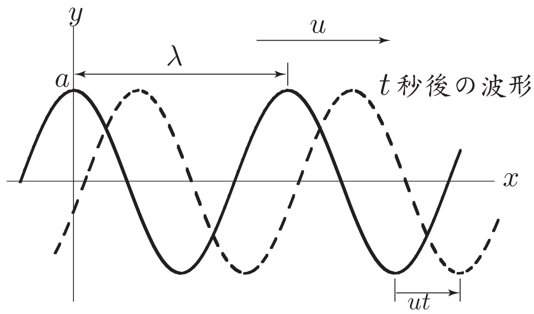
を得る。量子力学では偏角のことを**位相**といい，$e^{i\theta}$ を [(r)] ということが多い。[(r) 再出] を複素数にかけても絶対値は変わらず，位相を変えるだけである。たとえば，$z = |z|e^{i\theta}$ に $e^{i\theta'}$ をかけると，

$$\begin{aligned} ze^{i\theta'} &= |z|e^{i\theta}e^{i\theta'} \\ &= |z|e^{i(\theta+\theta')} \end{aligned} \tag{16}$$

となる。これからわかるように，$e^{i\theta'}$ をかけることは z を原点を中心に θ' だけ回転させることに等しい[1]。

[1] $\theta' = \pi/2$ とすれば，$e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i$ だから，Gauss 平面で $\pi/2$ だけ回転させることと i 倍することは同じである。すなわち，Gauss 平面において $(1,\ 0) \xrightarrow{\pi/2\ \text{回転}} (0,\ i) \xrightarrow{\pi/2\ \text{回転}} (-1,\ 0) \xrightarrow{\pi/2\ \text{回転}} (0,\ -i) \xrightarrow{\pi/2\ \text{回転}} (1,\ 0)$ となる。これは，$1 \times i = i$，$i \times i = -1$，$-1 \times i = -i$，$-i \times i = 1$ という「かけ算」に対応する。

[7]　波のもっとも簡単な例として，x 軸を正の方向へ伝わる**進行波**（しんこうは）を考える。この波が時刻 $t=0$ において右図実線の形であるならば，この波は，



$$y(x,t=0) \quad = \quad a\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \tag{17}$$

と表せる。ただし，λ は $\boxed{\quad\text{(s)}\quad}$，$a$ は $\boxed{\quad\text{(t)}\quad}$ を表す。ここで，波の伝わる速さを u とすれば，時間 t の後には図の波は右へ ut だけ移動する。このときの波を表す式は，図の実線の曲線を x 軸正方向へ ut だけ平行移動した式であるから，

$$y(x,t) = a\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\boxed{\quad\text{(u)}\quad}\right)\right) \tag{18}$$

となる。

ある任意の点 x_1 を単位時間に通過する波の数を $\boxed{\quad\text{(v)}\quad}$ といい，ν で表す。これは，波が単位時間にすすむ距離 $ut = u\times 1 = u$ を波長 λ で割ったものに等しいから，次式が成り立つ。

$$\nu = \frac{u}{\lambda} \tag{19}$$

また，ν の逆数を $\boxed{\quad\text{(w)}\quad}$ といい，T で表す。

$$T \quad = \quad \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda}{u} \tag{20}$$

(19) 式を (18) 式に代入すると次式を得る。

$$y(x,t) = a\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi\nu t\right) \tag{21}$$

ここで，**波数**（はすう）k と**角振動数**（かくしんどうすう）ω を次式で定義する。

$$k \quad := \quad \frac{2\pi}{\lambda} \tag{22}$$

$$\omega \quad := \quad 2\pi\nu \tag{23}$$

これらを (21) 式に代入すれば次式を得る。

$$y(x,t) = a\cos(kx - \omega t) \tag{24}$$

(24) 式は進行方向（x 軸方向）に垂直な方向（y 軸方向）の変位が伝わる $\boxed{\text{(x) 縦 or 横}}$ 波の例である。これを一般に拡張して，ある物理量 Ψ が，

$$\Psi(x,t) \quad = \quad a\cos(kx - \omega t) \tag{25}$$

の形で変化するものを**波動**（はどう）とよぶ。

[8] 質量 m の粒子が速度 v で運動している。この粒子の運動エネルギー E と運動量 p は以下のように表される。

$$E = \boxed{\quad (\mathrm{y}) \quad} = \frac{p^2}{2m} \tag{26}$$

$$p = \boxed{\quad (\mathrm{z}) \quad} \tag{27}$$

[9] 1923 年，**de Broglie**は運動量 p の粒子が，

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{28}$$

で与えられる波長の波として振る舞うとの仮説を発表した。この考え方を $\boxed{\quad (\alpha) \quad}$ といい，上式で計算される波長を**de Bloglie 波長**という。

ここで 100 V で加速した電子を考えると，加速のためのエネルギー eV がそのまま電子の運動エネルギーに変わるから，

$$eV = \frac{m_\mathrm{e} v^2}{2} \tag{29}$$

が成り立つ。このとき，電子の運動量は，

$$\begin{aligned} p &= m_\mathrm{e} v \\ &= \sqrt{2 m_\mathrm{e} eV} \end{aligned} \tag{30}$$

であるから，これを de Broglie 波長に換算すると，

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 m_\mathrm{e} eV}} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{Js}}{\sqrt{2 \times 9.109 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg} \times 1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C} \times 100\ \mathrm{V}}} \\ &= \boxed{\quad (\beta) \quad}\ \mathrm{m} \end{aligned} \tag{32}$$

を得る。これは，X 線の波長とほぼ同じである。

[10] （古典）統計力学の $\boxed{(\gamma)\text{ 人名}}$ 分布によると，状態がエネルギー E である確率は，$e^{-\beta E}$ に比例する。ここで，β は逆温度 $\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$ を表す。古典力学ではエネルギー E は連続量であるから，状態のとるエネルギーの平均値 $\langle E\rangle$ は次式で計算される。

$$\langle E\rangle = \frac{\displaystyle\int_0^\infty E e^{-\beta E}\mathrm{d}E}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-\beta E}\mathrm{d}E} \tag{33}$$

ここでは，(33) 式の計算をする。

まずは，分母を計算する。

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\beta E}\mathrm{d}E &= \left[\frac{e^{-\beta E}}{-\beta}\right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{(-\beta)}(0-1) \\ &= \boxed{(\delta)}\end{aligned} \tag{34}$$

次に分子を計算する。

$$\begin{aligned}\int_0^\infty E e^{-\beta E}\mathrm{d}E &= \int_0^\infty E\left(\frac{e^{-\beta E}}{-\beta}\right)'\mathrm{d}E \\ &= \underbrace{\left[E\cdot\frac{e^{-\beta E}}{(-\beta)}\right]_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty \frac{e^{-\beta E}}{(-\beta)}\mathrm{d}E \\ &= \frac{1}{\beta}\underbrace{\int_0^\infty e^{-\beta E}\mathrm{d}E}_{=\beta^{-1}} \\ &= \beta^{-2}\end{aligned} \tag{35}$$

以上より，

$$\langle E\rangle = \frac{\beta^{-2}}{\beta^{-1}} = \beta^{-1} = \boxed{(\epsilon)} \tag{36}$$

を得る。

(35) 式の 2 行目で，

$$\left[\frac{E}{e^{\beta E}}\right] = 0 \tag{37}$$

としたが，これは $\boxed{(\zeta)\text{ 人名}}$ の定理による。

$\boxed{(\zeta)\text{ 再出}}$ の定理

関数 $f(x)$ と $g(x)$ を考える。$\displaystyle\lim_{x\to c} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to c} g(x)$ の値が等しく，これが 0 もしくは $\pm\infty$ である場合，すなわち，$\displaystyle\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ もしくは $\displaystyle\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$ である場合，$\displaystyle\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在する場合にかぎり，$\displaystyle\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ である

いまの場合，$f(E) = E$，$g(E) = e^{\beta E}$ である。これらはともに，$\displaystyle\lim_{E\to\infty} f(E) = \lim_{E\to\infty} g(E) = \infty$ である。また，$\displaystyle\lim_{E\to\infty}\frac{f'(E)}{g'(E)} = \lim_{E\to\infty}\frac{1}{\beta e^{\beta E}} = \frac{1}{\infty} = 0$ であるから，$\displaystyle\lim_{E\to\infty}\frac{f(E)}{g(E)} = 0$ と判断できる。よって，上の ∞/∞ は 0 と判断できる。

[11] 前の頁を思い出しながら,（もちろん，前の頁を見ないで）次式をもう一度計算せよ。

$$\langle E\rangle = \frac{\displaystyle\int_0^\infty E e^{-\beta E}\mathrm{d}E}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-\beta E}\mathrm{d}E} \tag{38}$$

[12] （配布資料を見てよいので）以下の黒体輻射の公式を書け。

Wien の式

$$\rho(\nu, T) = \boxed{\quad(\eta)\quad}$$

Reyleigh−Jeans の式

$$\rho(\nu, T) = \boxed{\quad(\theta)\quad}$$

Planck の式

$$\rho(\nu, T) = \boxed{\quad(\iota)\quad}$$

[13]「Reileigh と Jeans の式がうまくいかないのは，エネルギーが連続であると考えることにある」と Planck は考え，エネルギーは不連続なとびとびの値をとると仮定した。これを，エネルギーの $\boxed{\quad(\kappa)\quad}$ 仮説という。すなわち，エネルギーを，

$$E = nh\nu \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{39}$$

と仮定した。すると，Reileigh と Jeans がやったようなエネルギーの平均値の計算が積分（問題 [12] を見よ）ではなく $\boxed{\quad(\lambda)\quad}$ で置き換えられる。

$$\langle E\rangle = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} Ee^{-\beta E}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E}} = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-\beta nh\nu}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta nh\nu}} \tag{40}$$

ここからは，分母と分子を別々に計算する。分母の和 $\sum$ を展開すると，

$$分母：\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta nh\nu} = 1 + e^{-\beta h\nu} + e^{-2\beta h\nu} + \cdots \tag{41}$$

となる。これは，初項が 1 で公比が $\boxed{\quad(\mu)\quad}$ の無限等比数列の和である。ところで，初項が a，公比が r，項数が n の等比数列の和 S_n は，

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} \\ &= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \end{aligned} \tag{42}$$

で表された。ここで，公比が 1 より小さい場合 $r < 1$ に限定すると，数列の項数が無限大でもその和は発散せず，その値は次式で表される。

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} \\ &= \boxed{\quad(\nu)\quad} \end{aligned} \tag{43}$$

今考えている「分母」の数列の公比 $\boxed{\quad(\mu)\ \text{再出}\quad}$ は明らかに 1 より小さいから（$\beta > 0,\ h > 0,\ \nu > 0$ だから），これを公式として用いれば，分母は，

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta nh\nu} = \frac{1}{1-e^{-\beta h\nu}} = \frac{e^{\beta h\nu}}{e^{\beta h\nu}-1} \tag{44}$$

と計算される。

一方，(40) 式の分子は，

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-\beta nh\nu} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta nh\nu}\right)}_{=分母} \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\left(\frac{e^{\beta h\nu}}{e^{\beta h\nu}-1}\right) \end{aligned} \tag{45}$$

という関係に気付けば，あとは分数の微分を実行すればよいだけであることがわかる。ここで，f と g がともに x の関数で，x による微分 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ を $'$ で簡単に書けば，分数 f/g の微分は，

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)' &= (fg^{-1})' \\ &= f'g^{-1} + f(g^{-1})' \\ &= f'g^{-1} - fg^{-2}g' \\ &= \frac{\boxed{\quad(\xi)\quad}}{g^2} \end{aligned} \tag{46}$$

と書ける。これを公式として用いると，

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\left(\frac{e^{\beta h\nu}}{e^{\beta h\nu}-1}\right) &= \frac{h\nu e^{\beta h\nu}(e^{\beta h\nu}-1) - e^{\beta h\nu}h\nu e^{\beta h\nu}}{(e^{\beta h\nu}-1)^2} \\ &= \boxed{\quad(\pi)\quad} \end{aligned} \tag{47}$$

結局，分子は，

$$\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-\beta nh\nu} = \frac{h\nu e^{\beta h\nu}}{(e^{\beta h\nu}-1)^2}$$

と書けることがわかった。

以上より，1 つの振動数 ν の状態についての平均エネルギー $\langle E\rangle$ は，

$$\begin{aligned} \langle E\rangle &= \frac{\dfrac{h\nu e^{\beta h\nu}}{(e^{\beta h\nu}-1)^2}}{\dfrac{e^{\beta h\nu}}{e^{\beta h\nu}-1}} \\ &= \boxed{\quad(\rho)\quad} \end{aligned} \tag{48}$$

と求まる。よって，空洞輻射の強度は 1 つの ν に対するエネルギーの平均値 $\langle E\rangle$ に状態数 $(8\pi\nu^2/c^3)\mathrm{d}\nu$ を掛け合わせたものであるから最終的に次式を得る。

$$\rho(\nu, T)\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\boxed{\quad(\rho)\ \text{再出}\quad}\mathrm{d}\nu \tag{49}$$

これは，$\boxed{\quad(\iota)\ \text{再出}\quad}$ に一致する。

[14] 金属板に光をあてると電子が飛び出す現象を $\boxed{(\sigma)}$ とよぶ。1905 年，**Einstein**は，振動数 ν，波長 λ の光が，

$$E = h\nu \qquad p = \frac{h}{\lambda} \tag{50}$$

のエネルギー E，運動量 p を持つ粒子 – これを**光子**もしくは $\boxed{(\tau)}$ という – であると仮定することで $\boxed{(\sigma)\ \text{再出}}$ を説明した。ここで，h は $\boxed{(\varphi)}$ とよばれる定数である。

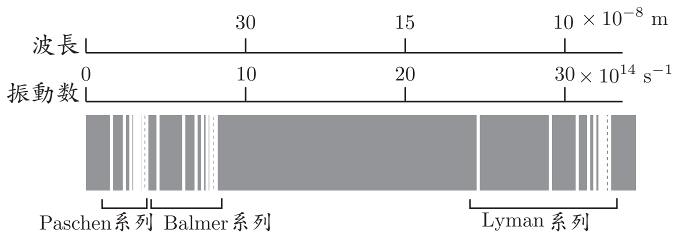
[15] 水素原子を放電させ，このスペクトルを可視光領域で調べると，4 つの波長のところに $\boxed{(\chi)}$ が観察される（下図参照）。1885 年に**Balmer**は，$\boxed{(\chi)\ \text{再出}}$ の波長が，

$$\lambda = \frac{an^2}{n^2 - 4} \ (a = 364.7 \text{ nm}) \tag{51}$$

に従うことを発見した[2]。これを $\boxed{(\psi)}$ とよぶ。その後，赤外線領域や紫外線領域にも $\boxed{(\chi)\ \text{再出}}$ が観察された。これらは発見者の名を冠して，**Paschen系列**，**Lyman系列**とよばれる。これ以外にも，**Brackett系列**，**Pfund系列**，**Humphreys系列**が知られている。これらはまとめて，

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \tag{52}$$

で表されることがわかった。これを**Rydbergの公式**という。ここで，R_∞ は $\boxed{(\omega)}$ といい，$R_\infty = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ である。

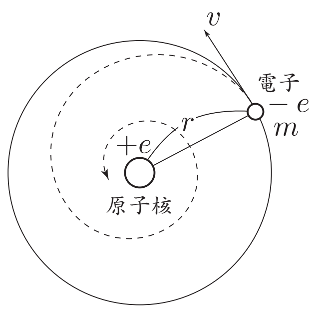


水素原子のスペクトルの m の値と系列名をまとめると次のようになる。

- $m = 1,\ n = 2, 3, 4, \cdots$ $\boxed{(\text{A})}$
- $m = 2,\ n = 3, 4, 5, \cdots$ $\boxed{(\varphi)\ \text{再出}}$
- $m = 3,\ n = 4, 5, 6, \cdots$ $\boxed{(\text{B})}$
- $m = 4,\ n = 5, 6, 7, \cdots$ $\boxed{(\text{C})}$
- $m = 5,\ n = 6, 7, 8, \cdots$ Pfund 系列
- $m = 6,\ n = 7, 8, 9, \cdots$ Humphreys 系列

Rydberg の公式は「経験式」としては十分（すぎるほど）に満足するものであるが，これを古典力学を用いて導出しようとしてもうまくいかなかった。なぜなら，水素原子の線スペクトルが発生するメカニズムが不明であったからである。

[2] Balmer は可視光領域に 656.28 nm，486.13 nm，434.05 nm，410.17 nm の 4 本の $\boxed{(\chi)\ \text{再出}}$ を確認し，これらが $n = 2, 3, 4, 5$ として $\boxed{(\psi)\ \text{再出}}$ に従うことを発見した。その後，近紫外領域にも $n \geq 7$ として Balmer 公式に従う輝線スペクトルが確認された。



[16] 1911 年に $\boxed{\text{(D) 人名}}$ は正電荷を帯びた小さな原子核のまわりを負電荷を帯びた電子が周回し，電気的中性を保っているという原子モデルを提案した。この原子模型では，核と電子のあいだに働く電気的引力，すなわち $\boxed{\text{(E) 人名}}$ 力が円運動の向心力とつり合う。つまり，

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \boxed{\text{(F)}r\ \text{の何乗}}} = \underbrace{\frac{m_\mathrm{e}v^2}{r}}_{\text{向心力}} \tag{53}$$

が成り立つことで電子は核の周りを周回運動すると考えた。

ところが，荷電粒子が加速度を持つと，電磁波を放出してエネルギーを失う。円運動は加速度を伴うから，電子が円運動するとエネルギーを失い，核からの引力に抗しきれず，徐々に核のほうへと引きずり込まれてしまう。これでは原子の安定性を説明できない。

1913 年，**Bohr**（ボーア）はこのモデルに角運動量を量子化するというアイデアを組み入れた。これは，のちに $\boxed{\text{(G)}}$ とよばれるようになった。角運動量の量子化とは，角運動量 $m_\mathrm{e}vr$ が $\hbar$ の $\boxed{\text{(H)}}$ 倍になるという条件で，

$$m_\mathrm{e}vr = n\hbar \tag{54}$$

と書き表される。ここで，$\hbar = \boxed{\text{(I)}}$ であり，$\boxed{\text{(J)}}$ とよばれる。Bohr はこの条件が満たされる場合にのみ安定な状態が得られると考えた。上の 2 式より，この安定な状態における，電子の軌道半径 r は次のように計算される。

$$\begin{aligned}
m_\mathrm{e}^2v^2r^2 &= n^2\hbar^2 && \text{(54) 式の両辺を 2 乗した} \\
m_\mathrm{e}v^2 &= \frac{n^2\hbar^2}{m_\mathrm{e}r^2} && m_\mathrm{e}v^2\text{について整理した} \\
\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} &= \frac{n^2\hbar^2}{m_\mathrm{e}r^3} && \text{上式を (53) 式に代入した} \\
r &= n^2 \boxed{\text{(K)}} && r\ \text{について整理した} \\
&= n^2 a_0 && a_0 := \boxed{\text{(K) 再出}}\ \text{とした}
\end{aligned} \tag{55}$$

最終行で定義した a_0 は $\boxed{\text{(L)}}$ という。すなわち，Bohr モデルでは電子の周回半径が a_0，$4a_0$，$\boxed{\text{(M)}}$,$16a_0, \cdots$ という具合に，とびとびの値に制限されることになる。

[17] ここで，古典電磁気学的に原子中の電子の全エネルギーを計算してみよう。もちろんこれは，運動エネルギー $m_\mathrm{e}v^2/2$ と位置エネルギー $U(r)$ の和で求められる。

運動エネルギー： (53) 式の両辺に r を乗じ，2 で割ると右辺は運動エネルギー $m_\mathrm{e}v^2/2$ の形になるから，

$$\frac{m_\mathrm{e}v^2}{2} = \boxed{\quad (\mathrm{N}) \quad} \tag{56}$$

を得る。

位置エネルギー： 電子の位置エネルギーは，核から $\boxed{\quad (\mathrm{O}) \quad}$ にある電荷 $-e$ を核の作る電場 $+e/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ まで持ってくる仕事に等しいから，

$$\begin{aligned} U(r) &= \int_\infty^r \left(-(-e)\frac{+e}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)\mathrm{d}r \\ &= -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_\infty^r && \text{積分した} \\ &= \boxed{\quad (\mathrm{P}) \quad} \end{aligned} \tag{57}$$

を得る。この 2 式より，全エネルギーは次のように計算される。

$$\begin{aligned} E(r) &= \boxed{\ (\mathrm{N})\ \text{再出}\ } + \boxed{\ (\mathrm{P})\ \text{再出}\ } \\ &= -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} && \text{整理した} \end{aligned} \tag{58}$$

を得る。これに，(55) 式（の下から 2 番目の式）を代入すると，

$$\begin{aligned} E_n &= -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\pi m_\mathrm{e}e^2}{n^2\epsilon_0 h^2} \\ &= -\frac{m_\mathrm{e}e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}\cdot\frac{1}{n^2} && \text{整理した} \end{aligned} \tag{59}$$

となる。

[18] Bohr モデルでは，電子がある安定な軌道から他の安定な軌道へとび移る場合，電磁波の放出や $\boxed{\quad (\mathrm{Q}) \quad}$ が起こる。その際の電磁波の周波数 ν は，

$$h\nu = |E_n - E_m| \tag{60}$$

で与えられる。ここで，E_n と E_m は軌道 n と軌道 m のエネルギーを表す。(59) 式を (60) 式に代入すると，

$$\begin{aligned} h\nu &= \left|-\frac{m_\mathrm{e}e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2} - \left(-\frac{m_\mathrm{e}e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}\right)\frac{1}{m^2}\right| \\ &= \frac{m_\mathrm{e}e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}\left|\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right| \end{aligned} \tag{61}$$

を得る。ところで，$c = \nu\lambda$ より，

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \frac{\nu}{c} \\ &= \frac{h\nu}{hc} && \text{分母分子に } h \text{ をかけた} \\ &= \frac{1}{hc}\frac{m_\mathrm{e}e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}\left|\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right| && \text{(61) 式より} \\ &= \boxed{\quad (\mathrm{R}) \quad}\left|\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right| && \text{整理した} \end{aligned} \tag{62}$$

を得る。

これを (52) 式と比較すると，$\boxed{\ (\mathrm{R})\ \text{再出}\ }$ が R_∞ に相当する。そこで，この対応を数値的に確認すると[3]，

$$\boxed{(\mathrm{R})\ \text{再出}\ \frac{m_\mathrm{e}e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c}} = \boxed{\quad (\mathrm{S}) \quad}\ \mathrm{m}^{-1}$$

を得るから，確かに（非常に良い精度で）これは R_∞ に一致する。

[3]物理定数表（例えば,「詳解　量子化学の基礎」395 頁）を参照し，かならず各自で計算せよ。

$$\underbrace{\frac{m_\mathrm{e}e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c}}_{(\iota)\ \text{の答}} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

[19] 下記の表の空欄を埋めよ。

記号	物理量	数値	単位
h	$\boxed{(\varphi)\ 再出}$		
e	電気素量		
m_{e}	電子の静止質量		

[20] ギリシャ文字の読み方を（ベタな）カタカナで書き入れよ。

大文字	小文字	発音記号	読み方	大文字	小文字	発音記号	読み方
A	α	álpha		N	ν	nŷ	
B	β	bêta		Ξ	ξ	xî	
Γ	γ	ǵamma		O	o	òmīkron	
Δ	δ	délta		Π	$\pi(\varpi)$	pî	
E	$\epsilon(\varepsilon)$	èpsīlón		P	$\rho\ (\varrho)$	rhô	
Z	ζ	zêta		Σ	$\sigma(\varsigma)$	sîgma	
H	η	êta		T	τ	taû	
Θ	$\theta(\vartheta)$	thêta		Υ	υ	ŷpsīlon	
I	ι	iôta		Φ	$\phi(\varphi)$	phî	
K	κ	káppa		X	χ	khî	
Λ	λ	lámbda		Ψ	ψ	psî	
M	μ	mŷ		Ω	ω	ômédga	

解答

[1]　なし

[2]　(a)：虚数単位

[3]　(b)：e^{a+b}　(c)：$e^{i(\theta+\theta')}$

[4]　(d)：$x-iy$　(e)：e^{-aix}　(f)：$\sin x$　(g)：$|z|^2$　(h)：1

[5]　(i)：Euler（オイラー）　(j)：2　(k)：$2i$　(ℓ)：1

[6]　(m)：虚　(n)：Gauss（ガウス）　(o)：$r\sin\theta$　(p)：動径（どうけい）

(q)：Pythagoras（ピタゴラス）　(r)：位相因子

[7]　(s)：波長　(t)：振幅（しんぷく）　(u)：$x-ut$　(v)：振動数　(w)：周期　(x)：横

[8]　(y)：$\dfrac{mv^2}{2}$　(z)：mv

[9]　(α)：物質波　(β)：1.2×10^{-10}

[10]　(γ)：Boltzmann（ボルツマン）　(δ)：β^{-1}　(ϵ)：$k_{\rm B}T$　(ζ)：l'Hôpital（ロピタル）

[11]　省略

[12]　(η)：$a\nu^3\exp\left(-\dfrac{b\nu}{k_{\rm B}T}\right)$　(θ)：$\dfrac{8\pi\nu^2}{c^3}k_{\rm B}T$　(ι)：$\dfrac{8\pi\nu^2}{c^3}\dfrac{h\nu}{e^{h\nu/k_{\rm B}T}-1}$

[13]　(κ)：量子　(λ)：無限級数　(μ)：$e^{-\beta h\nu}$　(ν)：$\dfrac{a}{1-r}$　(ξ)：$f'g-fg'$　(π)：$\dfrac{-h\nu e^{\beta h\nu}}{(e^{\beta h\nu}-1)^2}$

(ρ)：$\dfrac{h\nu}{e^{\beta h\nu}-1}$

[14]　(σ)：光電効果　(τ)：光量子　(φ)：Planck（プランク）定数

[15]　(χ)：輝線スペクトル　(ψ)：Balmer（バルマー）系列　(ω)：Rydberg（リュードベリ）定数

(A)：Lyman（ライマン）系列　(B)：Paschen（パッシェン）系列　(C)：Brackett（ ブラケット）系列

[16]　(D)：Rutherford（ラザフォード）　(E)：Coulomb（クーロン）　(F)：r^2（2 乗）

(G)：Bohr（ボーア）の量子条件　(H)：整数　(I)：$h/2\pi$　(J)：換算 Planck（プランク）定数

(K)：$\dfrac{\epsilon_0h^2}{\pi m_{\rm e}e^2}$　(L)：Bohr（ボーア）半径　(M)：$9a_0$　注：(K) は $\dfrac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_{\rm e}e^2}$ でも可

[17]　(N)：$\dfrac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$　(O)：無限遠　(P)：$-\dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

[18]　(Q)：吸収　(R)：$\dfrac{m_{\rm e}e^4}{8\epsilon_0^2h^3c}$　(S)：1.097×10^7

[19]

記号	物理量	数値	単位
h	Planck 定数	6.626×10^{-34}	J · s
e	電気素量	1.602×10^{-19}	C
$m_{\rm e}$	電子の静止質量	9.109×10^{-31}	kg

[20]

大文字	小文字	発音記号	読み方	大文字	小文字	発音記号	読み方
A	α	álpha	アルファ	N	ν	nŷ	ニュー
B	β	bêta	ベータ	Ξ	ξ	xî	クシー（グザイ）
Γ	γ	ǵamma	ガンマ	O	o	òmīkron	オミクロン
Δ	δ	délta	デルタ	Π	$\pi(\varpi)$	pî	パイ
E	$\epsilon(\varepsilon)$	èpsīlón	イプシロン	P	$\rho\ (\varrho)$	rhô	ロー
Z	ζ	zêta	ゼータ	Σ	$\sigma(\varsigma)$	sîgma	シグマ
H	η	êta	イータ	T	τ	taû	タウ
Θ	$\theta(\vartheta)$	thêta	シータ	Υ	υ	ŷpsīlon	ユプシロン
I	ι	iôta	イオタ	Φ	$\phi(\varphi)$	phî	ファイ
K	κ	káppa	カッパ	X	χ	khî	カイ
Λ	λ	lámbda	ラムダ	Ψ	ψ	psî	プサイ
M	μ	mŷ	ミュー	Ω	ω	ômégа	オメガ

今日の講義でわからないことがあれば，お伝えください。また，講義に対する要望があればお書きください。感想などでも結構です。もちろん，成績等には一切関係ありません。

✎ **記述欄**